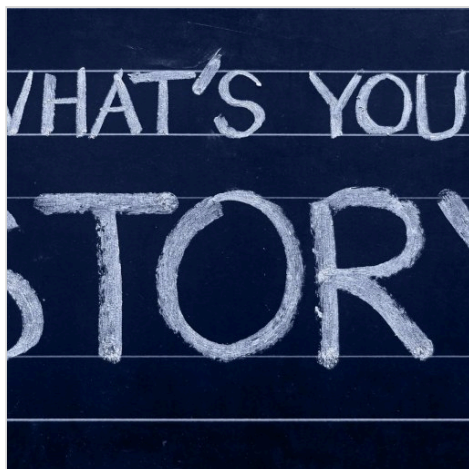


L U M B R E



La derivada como razón de cambio

Grado: 1

Materia: Cálculo Diferencial · Matemáticas

11/10/2026

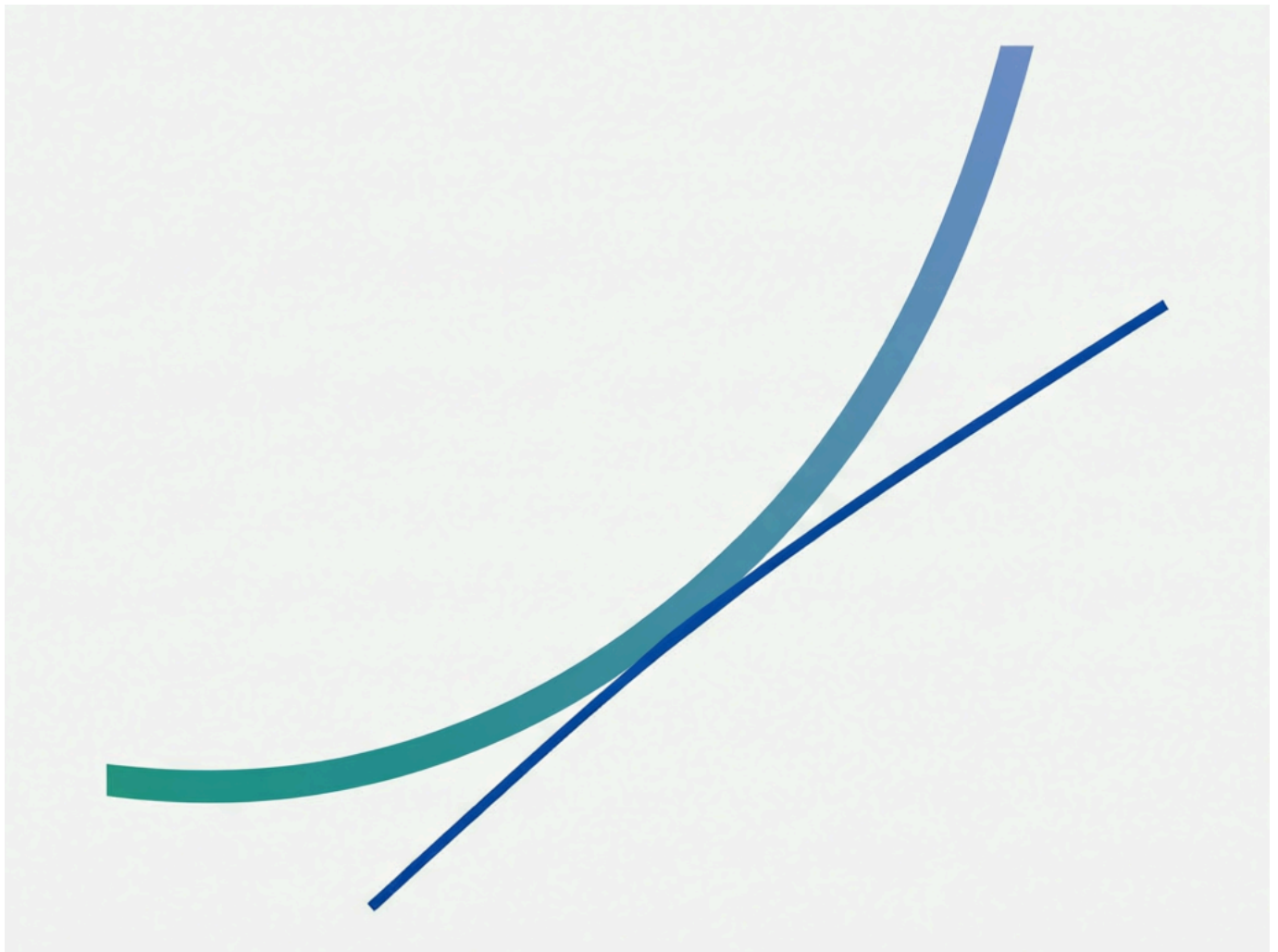
Antes de empezar

La derivada es la velocidad del cuentakilómetros: no cuánto cambiaste en una hora, sino a qué ritmo exacto cambias en este instante.

QUÉ APRENDERÁS

- Explica la derivada como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente y como tasa instantánea de cambio, y la calcula en funciones simples.

La derivada como razón de cambio



Conceptos clave del calculo diferencial: limites, derivadas y optimizacion.

Mapa conceptual

- **Calculo Diferencial**
 - Limites
 - Sucesiones
 - Funcion

- Continuidad
- Derivada
 - Razon de cambio
 - Reglas
 - Cadena
- Aplicaciones
 - Recta tangente
 - Aproximacion
 - Razones relacionadas
- Optimizacion
 - Maximos minimos
 - Gradiente
 - Multivariable

El mapa mental interactivo es interactivo en la versión online.



El gran empate

Dos problemas aparentemente distintos —la velocidad de una piedra que cae y la pendiente de una curva— resultaron ser el MISMO problema. Ese descubrimiento es la derivada, y por eso aparece tanto en física como en optimización.

Entre dos puntos de una curva, la pendiente del segmento que los une (la **recta secante**) mide el cambio promedio: $\Delta y / \Delta x$. La **derivada** es lo que queda cuando arrimas los dos puntos hasta que Δx se acerca a 0: la pendiente de la recta **tangente**, el ritmo instantáneo.

Definición como límite del cociente incremental

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La fracción $\Delta y / \Delta x$ de la secante; el límite hace que los dos puntos se fundan en uno y la secante se vuelva tangente.

Nota bien lo que dice la fórmula: $f(a)$ es el valor actual, $f(a + h)$ es el valor un poco después, y h es ese «un poco». Dividir su diferencia entre h da el promedio de cambio; el límite toma h cada vez más pequeño.

Tres lecturas de un mismo objeto

La notación cambia (dy/dx , $f'(x)$, ∇f) pero el contenido es siempre el mismo límite.

Lectura	Qué significa $f'(a)$	Quién la usa
Geométrica	pendiente de la tangente en a	gráficas, aproximación lineal
Física	velocidad instantánea en el instante a	movimiento, circuitos
Económica/ML	cambio marginal: cuánto aporta la siguiente unidad	gradiente, coste

En $x = 2$, la tangente a x^2 tiene pendiente 4

$f(x) = x^2$ — la curva $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ — tangente en $x = 2$: pendiente 4

El gráfico cartesiano interactivo es interactivo en la versión online.



Lee la gráfica con lupa

Comprueba que la recta $4x - 4$ pasa por $x = 2$ con $y = 4$: coincide con el punto de la curva. Y fuera de $x = 2$ se desvía: la tangente aproxima BIEN cerca del punto y MAL lejos de él. Esa es la semilla de la aproximación lineal.

Derivar x^2 paso a paso, con la definición

1. $f(x) = x^2$, entonces $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.
2. Diferencia: $f(x + h) - f(x) = 2xh + h^2$.
3. Divide entre h : $(2xh + h^2)/h = 2x + h$.
4. Límite con $h \rightarrow 0$: queda $2x$.
5. Por eso $f'(x) = 2x$, y en $x = 2$ la pendiente es 4.

ACTIVIDAD
INTERACTIVA
DISPONIBLE EN
LUMBRE

1. Ejemplo resuelto — Usando la idea de la derivada, ¿cuál es la pendiente de la tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 3$?



2. Usando la idea de la derivada, ¿cuál es la pendiente de la tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 3$?

☐ 6

☐ 9

☐ 3

☐ 2

3. Si una función es derivable en a , entonces es continua en a .

☐ Verdadero

☐ Falso

4. Asocia cada expresión con la idea que representa.

Elementos:

- $(f(b) - f(a))/(b - a)$
- $f(a)$
- pendiente de la secante
- límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a 0
- $f(a)$
- velocidad instantánea
- recta tangente

Cambio promedio	. . .
Derivada	. . .
Ni lo uno ni lo otro	. . .

Errores conceptuales que hay que matar pronto

- Creer que derivada es «la pendiente de la curva»: la curva no tiene UNA pendiente, la tiene en cada punto.
- Confundir $f(a)$ con $f'(a)$: valor contra tasa de cambio. Una función puede valer 1000 y estar cayendo, o valer 0 y subiendo.
- Suponer que toda función continua es derivable: x o una función escalonada rompen la derivabilidad aunque no rompan la continuidad.

En machine learning el gradiente es una derivada (o un vector de ellas): indica en qué dirección crece más la función de pérdida. «Bajar un paso» en el descenso de gradiente es, literalmente, usar la pendiente del terreno para elegir hacia dónde caminar.

ACTIVIDAD INTERACTIVA DISPONIBLE EN LUMBRE

5. La derivada en siete claves



La derivada (repaso formal) https://www.educacion.es/curriculum/roc_padres_padres/conocimiento/la-derivada-de-una-funcion.html Definición, interpretación geométrica y calculación con la definición de límite.

6. Una empresa vende q unidades con ingreso $R(q) = 100q - q^2$. Explica con la definición de derivada qué significa $R'(20)$ y calcula su valor interpretando si conviene vender una unidad más en ese punto.

3Blue1Brown: Calculus <https://www.3blue1brown.com/topics/calculus> Serie visual de cálculo diferencial con intuición geométrica.

ACTIVIDAD INTERACTIVA DISPONIBLE EN LUMBRE

7. Compuerta de dominio: La derivada como razón de cambio



Referencia curricular

Grado:	1
Materia:	Cálculo Diferencial · Matemáticas

Versión interactiva completa (con actividades, videos y autoevaluación):



<https://univ.lumbre.lat/object/cdia-calc1-004-la-derivada-como-razon-de-cambio>

Material educativo generado desde Lumbre · lumbre.lat