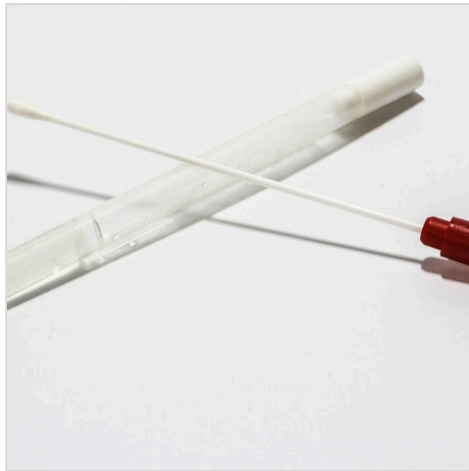


L U M B R E



Descomposicion en valores singulares: SVD

Materia: Ciencia de Datos e IA

11/10/2026

Antes de empezar

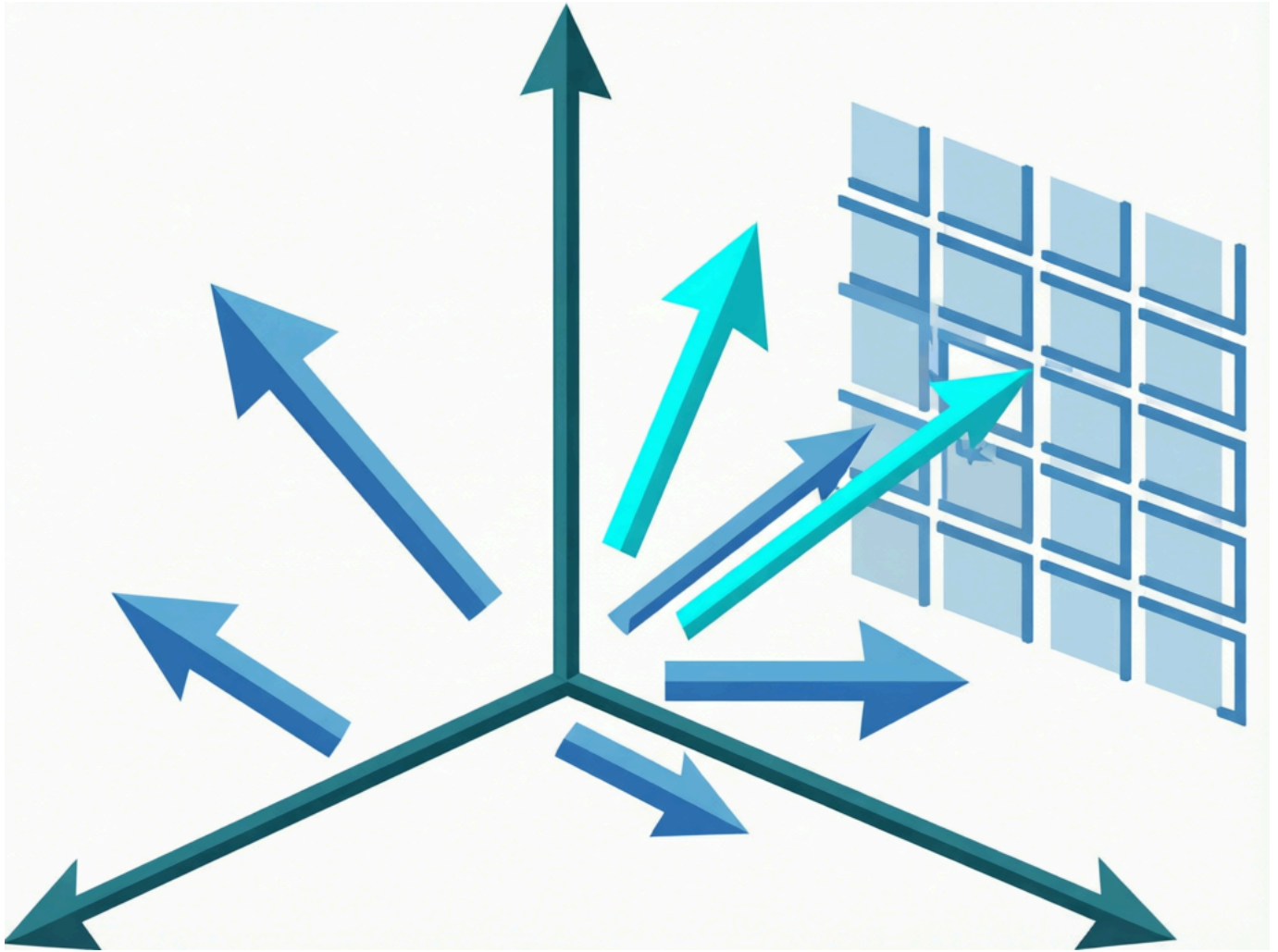
Objeto sobre $U \Sigma V^T$: elipse de la transformacion, factorizacion exacta de una matriz rango 1, compresion de imagenes con Eckart-Young, usos en scikit-learn y autoexamen.

QUÉ APRENDERÁS

- Comprender y aplicar la SVD como factorizacion universal: intuicion geometrica, ejemplo rango 1, aproximacion de bajo rango y conexiones con PCA, pseudo-inversion y recomendadores.

Descomposicion en valores singulares: SVD, la navaja de la algebra numerica

La auto-diagonalizacion solo funciona con matrices cuadradas y simetricas; la SVD funciona con CUALQUIER matriz, rectangular, mal condicionada y hasta llena de ceros. Es la herramienta detras de PCA en scikit-learn, de los sistemas de recomendacion por filtrado colaborativo y del compresor de imagenes mas elegante que conoceras. Este objeto la construye desde la intuicion geometrica hasta la aproximacion de rango k con las manos.



Toda transformacion lineal es: girar, estirar por los ejes, y volver a girar. Eso es exactamente SVD.

La promesa de SVD

Toda matriz A de m por n se escribe $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ con U ortogonal $m \times m$, V ortogonal $n \times n$ y Σ diagonal rectangular con valores singulares σ_1 mayor o igual σ_2 mayor o igual ... mayores o iguales 0. Sin condiciones: A puede ser cualquier cosa. Los sigma son las raices de los autovalores de $A^T A$.

Intuicion geometrica primero

Aplica A a todos los vectores unitarios del plano: la imagen del circulo es una ELIPSE. La SVD factoriza esa elipse en tres movimientos: V^T rota el circulo para alinear sus ejes con los de la elipse; Σ estira cada eje por su factor sigma; U rota el resultado hacia su posicion final. Los ejes de la elipse son los vectores singulares; su longitud, los valores singulares.

ACTIVIDAD INTERACTIVA
DISPONIBLE EN LUMBRE

1. Ejemplo rango 1: la SVD mas pequena del mundo



La mejor aproximacion de rango bajo: Eckart-Young

Guarda las k primeras componentes: $A_k = \sum \sigma_i u_i v_i^T$ para i de 1 a k . El teorema de Eckart-Young promete que es la MEJOR aproximacion de rango k posible (en norma de Frobenius y espectral): truncar la SVD no es un atajo, es el optimo. Los valores singulares decaen rapido cuando los datos tienen estructura: esa curva de decaimiento es la que justifica reducir dimensiones.

ACTIVIDAD INTERACTIVA DISPONIBLE EN
LUMBRE

2. Compresion de imagen a mano



SVD en tus futuras bibliotecas

- PCA en scikit-learn: por dentro usa SVD sobre la matriz centrada; los autovalores de la covarianza son $\sigma^2/(n-1)$.
- Pseudo-inversion: $A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$ invirtiendo solo los sigma mayores que un epsilon: la solucion estable de minimimos cuadrados cuando A no tiene inversa o esta mal condicionada (recuerda metn problema 7).
- Recomendadores: matriz usuario-item incompleta $\rightarrow$ factorizacion de rango bajo (SVD truncada o ALS) predice items que el usuario no vio.
- Numeros: en problemas de rango y nullspace, SVD da base ortonormal de los cuatro subespacios fundamentales con estabilidad numerica total.

Para que uso SVD

- $U \Sigma V^s$
 - Comprimir
 - Truncar por energia retenida
 - Reducir dimension
 - PCA como caso particular
 - Estabilizar
 - Pseudo-inversion con corte epsilon
 - Recomendar

- Factorizacion usuario-item

El mapa mental interactivo es interactivo en la versión online.



Autoexamen cronometrado (15 minutos)

3. ¿Cual es la VENTAJA de SVD frente a diagonalizacion de autovalores?

- ☐ Solo funciona en simetricas
- ☐ Funciona en cualquier matriz rectangular
- ☐ Es mas rapida de calcular
- ☐ No necesita ortogonalidad

4. Los valores singulares de A son las raices de los autovalores de $A^T A$.

- ☐ Verdadero
- ☐ Falso

5. Para A diagonal $[[3, 0], [0, 2]]$, sus valores singulares son 3 y 2. ¿Cual es σ_1 ?

Respuesta:

6. En el ejemplo rango 1, $A^T A$ tuvo autovalores 25 y 0. ¿Cuantos valores singulares NO nulos tiene A ?

Respuesta:

7. Truncar la SVD a k componentes es la mejor aproximacion de rango k gracias al teorema de Eckart-_____.

8. Empareja factor con su papel geometrico.

8.	V^T	_____
8.	Σ	_____
8.	U	_____
8.	Truncar	_____

Opciones: Rota la entrada a los ejes propios · Estira cada eje por sigma · Rota hacia la posicion final · Descarta ejes de energia despreciable

Video de repaso

VIDEO

Algebra lineal: video complementario

Repaso visual de transformaciones y factorizaciones matriciales.



Escanea para verlo en Lumbre

<https://www.youtube.com/watch?v=k7B8Q1Bk1nQ>

Para profundizar

3Blue1Brown: algebra lineal <https://www.3blue1brown.com/topics/linear-algebra> La serie geometrica que hace VER las transformaciones; capitulo 15 y siguientes tocan factorizaciones.

Setosa: autovalores ilustrados <https://setosa.io/ev/eigenvectors-and-eigenvalues/> Interactivo del capitulo anterior; su hermano de SVD es la mejor puerta intuitiva.

9. La compresion por rango bajo presume que la matriz "realmente" tiene rango cerca de k . Piensa en una matriz de interacciones usuario-pelicula o en genes x pacientes: ¿por que un rango 50 captaria millones de datos? Escribe la hipotesis estructural que hace plausible la factorizacion.

Referencia curricular

Materia:	Ciencia de Datos e IA
-----------------	-----------------------

Versión interactiva completa (con actividades, videos y autoevaluación):



<https://univ.lumbre.lat/object/cdia-lin-014-svd-la-factorizacion-universal>

Material educativo generado desde Lumbre · lumbre.lat