

L U M B R E



Métodos de raíz: bisección y Newton

Grado: 3

Materia: Métodos Numéricos · Matemáticas

11/10/2026

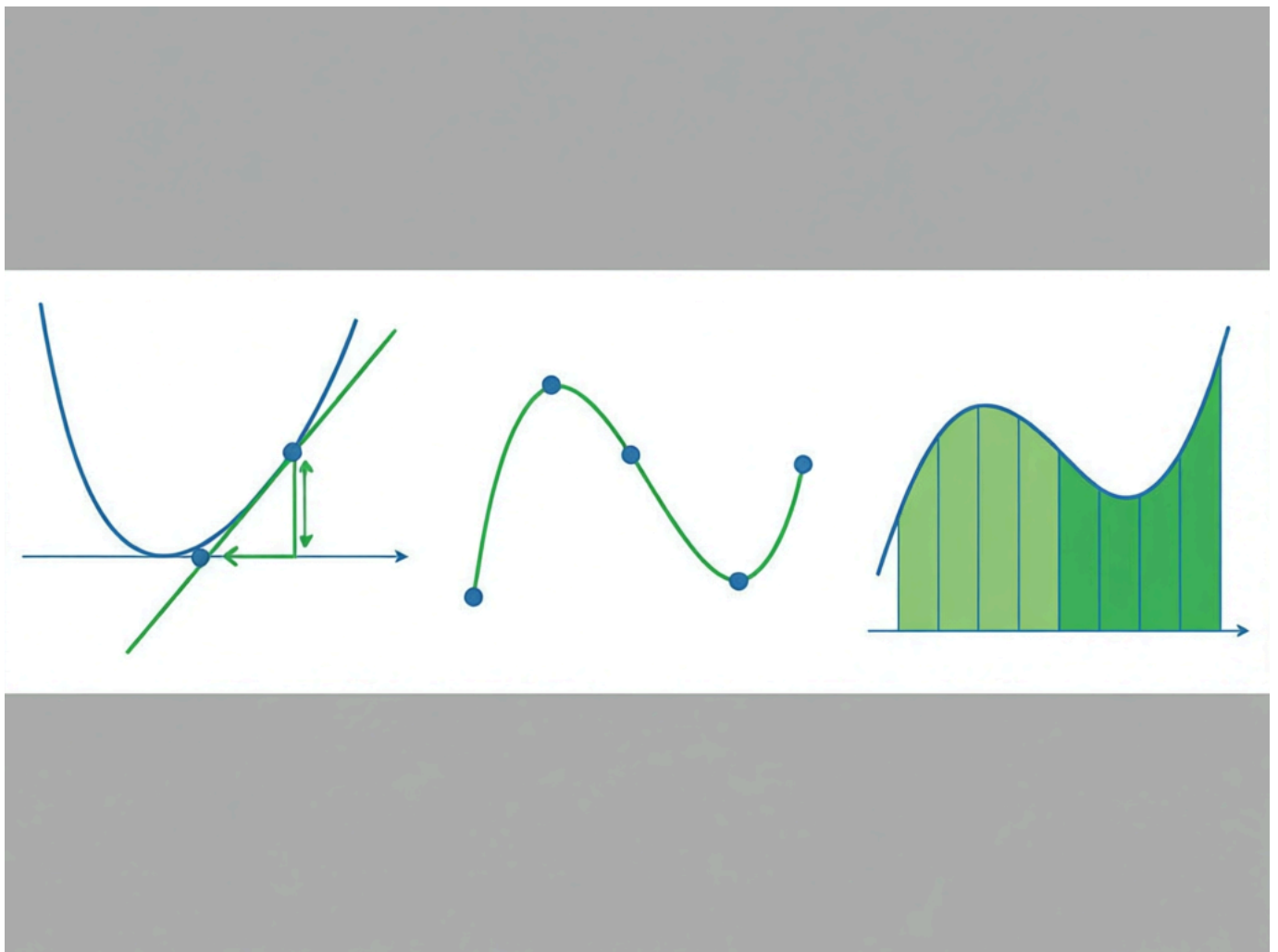
Antes de empezar

Muchos problemas se reducen a encontrar dónde una función se anula. No existe fórmula general para ello, así que se camina hacia la raíz por aproximaciones sucesivas. Esta lección compara dos estrategias emblemáticas: la segura y lenta, y la rápida y delicada.

QUÉ APRENDERÁS

- Resolver ecuaciones no lineales de forma iterativa, comprendiendo la convergencia de la bisección y del método de Newton, y sus condiciones de fallo.

Métodos de raíz: bisección y Newton



Métodos numéricos: raíces, interpolación, integración y sistemas lineales.

Mapa conceptual

- **Métodos Numéricos**

- Raíces
 - Bisección
 - Newton
- Interpolación
 - Lagrange
 - Splines
- Integración
 - Trapecios
 - Simpson
- Sistemas
 - Gauss
 - Iteración
- Errores
 - Redondeo
 - Truncamiento
 - Estabilidad

El mapa mental interactivo es interactivo en la versión online.



Persiguiendo el cero de una función

Encontrar donde una curva cruza el eje es tan antiguo como útil: el punto de equilibrio, el precio de mercado, la tasa interna de retorno. Como no hay fórmula mágica, se persigue la raíz con algoritmos que mejoran una aproximación una y otra vez.

Por qué iterativo

Salvo casos especiales (polinomios de grado bajo), no existe una fórmula cerrada para las raíces de una función arbitraria. La única salida es numérica: partir de una sospecha y refinarla con reglas que, se espera, convergen hacia el cero.

La idea de enclaustramiento

Si una función continua cambia de signo entre dos puntos, en medio hay al menos una raíz (teorema del valor intermedio). Ese simple hecho es el cimiento de los métodos

robustos: en lugar de adivinar, se encierra la raíz en un intervalo que garantiza su presencia.

Bisección

El método de bisección toma un intervalo con cambio de signo, calcula el punto medio y conserva la mitad donde persiste el cambio de signo. Repite. Cada paso reduce el ancho del intervalo a la mitad: garantizado, tonto, e imparable.

Convergencia de la bisección

La bisección converge de forma lineal: cada iteración gana aproximadamente una cifra binaria de precisión. Para reducir el error diez veces hacen falta unos tres o cuatro pasos. Es lenta pero nunca falla si el arranque enclaustra una raíz.

Ventaja de la bisección

Su virtud es la robustez: no necesita derivadas, no depende de un buen punto inicial más allá de un intervalo válido, y la convergencia está garantizada. Es el método al que recurrir cuando no se puede permitir el lujo de divergir.

Inconveniente

Su lentitud. Cuando se necesitan muchas cifras o se resuelven miles de ecuaciones, la bisección resulta cara. Y solo encuentra una raíz por intervalo: si hay varias enclaustradas, hay que separarlas previamente.

Newton: usar la pendiente

El método de Newton-Raphson aprovecha la derivada: desde un punto, traza la tangente a la curva y donde esa tangente corta el eje horizontal coloca la siguiente aproximación. Usa información local de primer orden para saltar directamente hacia la raíz.

La iteración de Newton

La nueva aproximación es la vieja menos el valor de la función entre su derivada en ese punto. Geométricamente, es la intersección de la tangente con el eje. Convergencia cuadrática: el número de cifras correctas se duplica en cada paso cuando se está cerca de la raíz.

Convergencia cuadrática

Si la bisección gana una cifra binaria por paso, Newton las duplica. Cerca de la raíz, es espectacular: en pocos iterados se alcanza la precisión de máquina. Esta velocidad es la razón de su enorme uso en optimización y resolución de sistemas.

El precio de la velocidad

Newton no garantiza nada globalmente. Lejos de la raíz puede divergir, oscilar entre dos puntos o saltar hacia otra raíz lejana. Requiere derivada y un buen punto de partida. Es un método local: excelente cerca del objetivo, impredecible lejos.

Cuando la derivada traiciona

Si la derivada se anula o es minúscula cerca del iterado, el cociente explota y el salto es absurdo. En raíces múltiples (donde la función toca el eje sin cruzarlo con pendiente), Newton pierde su convergencia cuadrática y se vuelve lento.

Falla sin enclaustramiento

A diferencia de la bisección, Newton puede escapar al infinito en funciones no acotadas. Por eso en la práctica se combina: una fase robusta (bisección o regla falsi) que enclaustre, y Newton que acelere dentro del intervalo seguro.

Regla falsi y variantes

Entre ambos extremos hay interpolaciones: regla falsi traza la recta secante entre los dos extremos del intervalo y usa su corte, manteniendo el enclaustramiento. Las variantes Illinois y Pegasus corrigen su tendencia a estancarse en un extremo.

Criterio de parada

¿Cuándo detenerse? Se combina un umbral sobre el residuo (valor de la función cerca de cero) con otro sobre el cambio entre iteraciones. Ninguno basta solo: un residuo pequeño puede acompañar una mala aproximación en problemas mal condicionados.

Orden de convergencia

La rapidez con que el error se reduce define el orden: lineal (factor constante) para bisección, cuadrático (error siguiente proporcional al cuadrado del actual) para Newton. Conocer el orden permite predecir cuántas iteraciones costará una precisión dada.

Estrategia híbrida

- Buscar primero intervalos con cambio de signo barriando el dominio.
- Acotar con unos pasos de bisección para entrar en la cuenca de atracción.
- Acelerar con Newton una vez cerca.
- Rechazar el paso de Newton si sale del intervalo, cayendo a bisección.

1. La principal diferencia entre bisección y Newton es que:

- ☐ Newton es siempre más lento pero más preciso
- ☐ La bisección garantiza convergencia pero es lineal; Newton es cuadrático pero puede divergir
- ☐ La bisección necesita la derivada
- ☐ Newton solo funciona con polinomios

2. El método de Newton converge a la raíz más cercana al punto inicial con independencia de la función.

- ☐ Verdadero
- ☐ Falso

Conteo de raíces

Si la función no cambia de signo en una raíz (tangente al eje), los métodos por enclaustramiento no la detectan. Buscar raíces exige a veces estudiar mínimos de la función al cuadrado o usar información adicional sobre su estructura.

En alta dimensión

Para sistemas de ecuaciones, Newton se generaliza con la matriz jacobiana: cada paso resuelve un sistema lineal para el incremento. La convergencia sigue siendo cuadrática cerca de la solución, pero el coste por iteración crece mucho.

Errores frecuentes

- Lanzar Newton sin un punto inicial razonable y celebrar la divergencia como bug.
- Detenerse solo por residuo pequeño sin comprobar el condicionamiento.
- Olvidar que la bisección necesita cambio de signo real en el intervalo de partida.

ACTIVIDAD INTERACTIVA DISPONIBLE EN LUMBRE

3. Raíces: vocabulario



4. Ordena la estrategia híbrida recomendada:

Elementos:

- barrer el dominio buscando cambios de signo
- asegurar la raíz con bisección
- refinar rápido con Newton cerca
- detenerse con residuo y paso pequeños

Buscar	. . .
Acotar	. . .
Acelerar	. . .
Parar	. . .

Newtons method https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method Derivación geométrica, convergencia y contraejemplos de divergencia.

VIDEO

Video complementario

Recurso audiovisual para reforzar los conceptos.



Escanea para verlo en Lumbre

https://www.youtube.com/watch?v=3Hx2_I9Mg2o

5. Tienes una ecuación cuya derivada se anula cerca de la solución que buscas. ¿Qué método elegirías y por qué Newton podría rendir peor de lo esperado ahí?

Math.NET Numerics <https://numerics.mathdotnet.com/> Biblioteca de métodos numéricos.

Referencia curricular

Grado:	3
Materia:	Métodos Numéricos · Matemáticas

Versión interactiva completa (con actividades, videos y autoevaluación):



<https://univ.lumbre.lat/object/cdia-metn-002-metodos-de-raiz-biseccion-y-newton>

Material educativo generado desde Lumbre · lumbre.lat